关于 Smarandache 函数的奇偶性

熊文井

(陕西教育学院数理系, 陕西 西安 710061)

摘 要: 对任意正整数 n, 著名的 F.Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. 令 $OS(n)$ 表示区间 $[1,\ n]$ 中 $S(n)$ 为奇数的正整数 n 的个数; $ES(n)$ 表示区间 $[1,\ n]$ 中 $S(n)$ 为偶数的正整数 n 的个数. 在文 [2] 中, Kenichiro Kashihara 建议我们研究极限 $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{ES(n)}{OS(n)}$ 的存在问题. 如果存在, 确定其极限. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 即就是证明该极限存在且为零.

关 键 词: Smarandache 函数; 奇偶性; 极限
中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2008)02-0363-04

1 引言及结论

对任意正整数 n, 我们定义算术函数 $S(n)$ 为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家 Smarandache 教授在他所著的书中引入的 [1], 并建议人们研究它的性质! 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们也不难计算出 $S(n)$ 的前几个值为: $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, $\cdots$. 关于 $S(n)$ 的算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果 [3-6,9-10]. 例如, 文 [3] 研究了一类包含 $S(n)$ 方程的可解性, 证明了该方程有无穷多组正整数解. 即就是证明了对任意正整数 $k\ge 2$, 方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

文 [4] 进一步证明对任意正整数 $k\ge 2$, 存在无穷多组正整数 ($m_1,m_2,\cdots,m_k$) 满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

同时, 又存在存在无穷多组正整数 ($m_1,m_2,\cdots,m_k$) 满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

收稿日期: 2007-11-02.
基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).
作者简介: 熊文井 (1967-), 讲师, 研究方向: 基础数学的教学与研究.

此外, 文 [5] 获得了有关 $S(n)$ 的一个深刻结果! 也就是证明了渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

现在我们令 $OS(n)$ 表示区间 $[1,\ n]$ 中 $S(n)$ 为奇数的正整数 n 的个数; $ES(n)$ 表示区间 $[1,\ n]$ 中 $S(n)$ 为偶数的正整数 n 的个数. 在文 [2] 中, Kenichiro Kashihara 提出了下面的问题

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{ES(n)}{OS(n)}$$

是否存在? 如果存在, 确定其极限.

关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有看到过有关方面的论文. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

定理 对任意正整数 $n>1$, 我们有估计式

$$\frac{ES(n)}{OS(n)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

显然这是一个比解决文 [2] 中问题更强的结论. 由此定理我们立刻得到下面的:

推论 对任意正整数 n, 我们有极限

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{ES(n)}{OS(n)}=0$$

2 定理的证明

这节我们利用初等方法给出定理的直接证明. 首先我们估计 $ES(n)$ 的上界. 事实上当 $n>1$ 时, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么由函数 $S(n)$ 的定义及性质可设 $S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若 $m=1$, 那么 $S(n)=p_i$ 为奇数, 除非 $n=2$. 令 $M=\ln n$, 于是我们有

$$ES(n)=\sum_{\substack{k\leq n\\ 2|S(k)}}1\leq 1+\sum_{\substack{k\leq n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\geq 2}}1\leq 1+\sum_{S(k)\leq M}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 2}}1 \qquad (1)$$

现在我们分别估计 (1) 式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{kp^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 2}}1 &\leq \sum_{\substack{kp^2\leq n\\ 2p>M}}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 3}}1\leq \sum_{\frac{M}{2}<p\leq\sqrt{n}}\sum_{k\leq\frac{n}{p^2}}1+\sum_{\substack{p^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 3}}\sum_{k\leq\frac{n}{p^\alpha}}1\\ &\ll \sum_{\frac{M}{2}<p\leq\sqrt{n}}\frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 3}}\frac{n}{p^\alpha}\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq p}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\leq\alpha<p}}\frac{n}{p^\alpha}\\ &\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\geq 3}}\frac{n}{p^\alpha}\\ &\ll\frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n} \qquad (2)\end{aligned}$$

对于 (1) 式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数 $p \le M$, 令 $\alpha(p) = \left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是 $\alpha(p)$ 表示不超过 $\frac{M}{p-1}$ 的最大整数. 设 $u = \prod\limits_{p \le M} p^{\alpha(p)}$. 对任意满足 $S(k) \le M$ 的正整数 k, 设 $S(k) = S(p^{\alpha})$, 则由 $S(k)$ 的定义一定有 $p^{\alpha} | M!$, 从而

$$\alpha \le \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{M}{p^j}\right] \le \frac{M}{p-1}$$

所以所有满足 $S(k) \le M$ 的正整数 k 一定整除 u, 所有这样 k 的个数不会超过 u 的正因数的个数, 即就是 $d(u)$. 所以我们有

$$\begin{aligned}\sum_{S(k) \le M} 1 \le \sum_{d|u} 1 = \prod_{p \le M} (1 + \alpha(p)) = \prod_{p \le M} \left(1 + \left[\frac{M}{p-1}\right]\right) \\ = \exp\left(\sum_{p \le M} \ln\left(1 + \left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

其中 $\exp(y) = \mathrm{e}^y$.

由素数定理的两种形式 (参阅文 [7-8])

$$\pi(M) = \sum_{p \le M} 1 = \frac{M}{\ln M} + O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right) \text{ 及 } \sum_{p \le M} \ln p = M + O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}&\sum_{p \le M} \ln\left(1 + \left[\frac{M}{p-1}\right]\right) \le \sum_{p \le M} \ln\left(1 + \frac{M}{p-1}\right) \\ =&\sum_{p \le M} \left[\ln(p - 1 + M) - \ln p - \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right] \\ \le&\pi(M) \cdot \ln(2M) - \sum_{p \le M} \ln p + \sum_{p \le M} \frac{1}{p} \\ =&\frac{M \cdot \ln(2M)}{\ln M} - M + O\left(\frac{M}{\ln M}\right) = O\left(\frac{M}{\ln M}\right) \qquad (4)\end{aligned}$$

注意到 $M = \ln n$, 由 (3) 及 (4) 式立刻得到估计式

$$\sum_{S(k) \le M} 1 \ll \exp\left(\frac{c \cdot \ln n}{\ln \ln n}\right) \qquad (5)$$

其中 c 为一正常数.

注意到 $\exp\left(\frac{c \cdot \ln n}{\ln \ln n}\right) \ll \frac{n}{\ln n}$, 于是结合 (1), (2) 及 (5) 式立刻推出估计式:

$$ES(n) = \sum_{\substack{k \le n \\ 2 | S(k)}} 1 = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

显然 $OS(n)+ES(n)=n$, 所以由上式可得

$$OS(n)=n-ES(n)=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

从而

$$\frac{ES(n)}{OS(n)}=\frac{O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Kenichiro Kashihara. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[3] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[4] Jozsef Sandor. On a dual of the Pseudo-Smarandache function [J]. Smarandache Notions (Book series), 2002, 13: 16-23.

[5] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. Acta Mathematica Sinica, 2006, 49(5): 1009-1012.

[6] Le Maohua. Two function equations [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.

[7] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [J]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[8] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社,2007.

[9] 杜风英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.

[10] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 351-354.

On the parity of the Smarandache function

XIONG Wen-jing

(Department of Mathematics and Physics, Shaanxi Institute of Education, Xi'an 710061,China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. That is, $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. Let $OS(n)$ denotes the number of all n in the interval $[1,\ n]$ such that $2|S(n)+1$; and $ES(n)$ denotes the number of all n in the interval $[1,\ n]$ such that $2|S(n)$. In reference [2], Kenichiro Kashihara asked us to determine the limit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{ES(n)}{OS(n)}$, if it exists, find its limit. In this paper, we solved this problem completely, and prove that its limit is zero.

Keywords: Smarandache function, properties, parity, limit

2000MSC: 11B83